

Туреханова В.Б.^{1*}, Раскалиев А.С.², Ахмедов Д.Ш.²

¹Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
Казахстан, г. Алматы, *e-mail: turekhanova_venera@mail.ru

²Институт Космической техники и технологий, Казахстан, г. Алматы
e-mail: akhmedov.Daulet@gmail.com

ОПЫТ ПРИМЕНЕНИЯ ФУНКЦИИ ВЕЙВЛЕТ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В РАЗРАБОТКЕ МОДЕЛИ КВАЗИГЕОИДА

Для точности геодезического производства важным является определение конкретных высотных отметок для геодезического производства с помощью космических технологий, с режимом нормированных вертикалей при наземном наблюдении в виде геометрического и тригонометрического нивелирования. Взаимодействие геодезических и нормальных высотных показателей определяется по данным аномалии высоты квазигеоида, которую можно рассчитать по данным космических измерений, произведенных на Земной поверхности. Достоверная атрибуция аномалии высоты требует большой точности, а следовательно, использования космических технологий как альтернативу трудоемкого наземного нивелирования. Характеризующие действительного колебания от нормали гравитационного поля Земли является актуальной задачей при расчете гравиметрических уклонов отвеса. Данные уклоны отвеса применяются при определении редукции и решении математических задач физической геодезии и формировании связи геодезических и астрономических систем координатами и т.д. Фундаментальные исследования трансформант гравитационного поля Земли, обоснованные интегральными вычислениями, без учета исходной системы дискретной информации, которые сопровождаются погрешностями измерений, кроме этого, не на всей поверхности Земли известны. В современных условиях практическое и теоретическое решение задач в реальном масштабе времени определения трансформант гравитационного поля предопределяет всевозможные математические решения при разработке модели квазигеоида.

Ключевые слова: геодезия, системы координат, гравитационное поле, геоид, квазигеоид, гравиметрическая высота, моделирование, преобразование координат, метод регуляции.

Turekhanova V.B.^{1*}, Raskaliyev A.S.², Akhmedov D.Sh.²

¹Al-Farabi Kazakh National University,
Kazakhstan, Almaty, *e-mail: turekhanova_venera@mail.ru

²PhD doctoral, professor, director, e-mail: Akhmedov.Daulet@gmail.com
Institute of Space Technology and Technology, Kazakhstan, Almaty

Experience of application of the wavelet function of transformation in the development of the of the quasigeoid model

The article deals with the experience of using satellite methods of determining coordinates based on measurements performed by global navigation satellite systems (GLONASS, GPS, etc.), fundamentally changing the technology and accuracy of geodetic measurements. For topographic and geodetic production, it is important to establish a connection between the system of geodetic heights obtained from satellite leveling, with a system of normal heights derived from surface geometric leveling. The relationship between geodetic and normal heights is realized through an anomaly of height (the height of a quasi-geoid), which can be calculated from the results of gravimetric measurements performed on the surface of the Earth or related to its surface. Accurate definition of the height anomaly allows using satellite leveling instead of labor-intensive ground leveling. The problem of determining the gravimetric deviations of the plumb line is also urgent; Characteristic of the deviation of the real gravitational

field of the Earth from the normal. Components of the plumb deflections are used in solving the reduction problems of higher geodesy, in establishing the connection between astronomical and geodetic coordinate systems, etc. Classical methods for determining transformants of the gravitational field, based on integral formulas, do not take into account that the initial information is discrete, burdened by measurement errors and is not known on the entire surface of the Earth. An important requirement of today is a theoretical and practical solution to the problem of determining the transformants of the gravitational field in real time.

Key words: geodesy, quasi-geoid, gravimetric height, modeling, coordinate transformation, method of regulation.

Туреханова В.Б.^{1*}, Раскалиев А.С.², Ахмедов Д.Ш.²

¹Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
Қазақстан, Алматы қ., *e-mail: turekhanova_venera@mail.ru

²Ғарыштық техника және технологиялар институты, Қазақстан, Алматы қ.

Квазигеоид моделін дамытуда вейвлет түрлендіру функцияларын енгізу тәжірибесі

Мақалада геодезиялық өлшемдер дәлдігін және технологиясын, түбегейлі жаһандық навигациялық серіктік жүйесімен (ГЛОНАСС, GPS және т.б.) орындалатын өлшемдерге негізделген координаталарды анықтаудың серіктік әдістерін қолдану тәжірибесі қарастырылған. Топографиялық-геодезиялық өндіріс үшін серіктік нивелирлеуден алынған геодезиялық биіктік жүйесі мен жер геометриялық нивелирлеуден алынған нормальдық биіктік арасындағы байланысты орнату маңызды. Геодезиялық және нормальдық биіктіктер арасындағы байланысы Жер бетінде немесе оның бетіне қатысты орындалатын гравиметриялық өлшеулер нәтижелері бойынша есептеуге болатын биіктік аномалиясы (квазигеоид биіктігі) арқылы жүреді. Биіктік аномалиясын дәл анықтау арқылы жүзеге асырылуы күрделі жербеттік нивелирлеуді серіктік нивелирлеумен алмастыруға болады. Жердің нақты гравитациялық өрісінің нормадан ауытқуын сипаттайтын, тіктеуіштің гравиметриялық ауытқуын анықтау мәселесі де өзекті астрономиялық және геодезиялық координаталар жүйелері арасындағы байланысты және т.б. орнату кезінде жоғарғы геодезиядағы редуциялық есептерді шешу кезінде тіктеуіш ауытқуының құрамдас бөліктері қолданылады. Интегралдық формулаларға негізделген гравитациялық өріс трансформатын анықтаудың классикалық әдістері, бастапқы ақпараттардың дискретті болуын, қате өлшемдердің күрделілігін және Жер бетінің барлық бөліктерінде белгілі бола бермейтінін ескермейді. Қазіргі кезде уақыттың нақты масштабында гравитациялық өріс трансформантын анықтау мәселелерін теориялық тұрғыдан және практикалық тұрғыдан шешу маңызды.

Түйін сөздер: геодезия, квазигеоид, гравиметриялық биіктігі, модельдеу, координаттарды түрлендіру, реттеу әдісі.

Введение

В настоящее время геодезическая информация значительно увеличилась в объеме и изменилась в качестве измерений, что привело к пересмотру стратегии развития не только геодезии и гравиметрии как наук, но и топографо-геодезического и гравиметрического производства в связи с развитием глобальных навигационных спутниковых систем GPS (США) и ГЛОНАСС (Россия) (Гофман-Велленгоф, 2007; Антонович, 2005).

Развитие высокоэффективных спутниковых методов определения трехмерных координат позволяет получить высокоточную высотную сеть без трудоемкого нивелирования, но только при условии, если с сантиметровой точностью удастся определить аномалию высоты. Составляющие отклонения отвеса также надо знать с точностью

не только нулевого, но и последующих приближений.

Использование спутниковых методов с применением глобальных навигационных систем GPS и ГЛОНАСС, а также создание глобальной сети станций, непрерывно принимающих сигналы со спутников GPS и ГЛОНАСС, сделало реальным распространение с сантиметровой точностью единой трехмерной системы координат на всей поверхности планеты. Это означает, что поверхность Земли S можно считать известной.

Поэтому, в настоящее время, можно перейти от решения краевой задачи физической геодезии, в которой краевая поверхность сама подлечит определению к краевой задаче, в которой краевая поверхность известна. Современные спутниковые измерения позволяют вычислить чистые аномалии силы тяжести не менее точно, чем смешанные.

Благодаря трудам М.С. Молоденского (Молоденский, 2001; Бровар, 1996, Антонович, 2005; Грушинский, 1963; Двудит, 1988) и других ученых методы определения физической поверхности Земли и ее внешнего гравитационного поля базируются на строгой теории, позволяющей принципиально строго с любой степенью точности решать задачи физической геодезии. Общим для этих методов является представление аномалии силы тяжести притяжением материального слоя на поверхности Земли первого приближения и сведением задачи к решению последовательными приближениями составленных интегральных уравнений. При этом обеспечиваются универсальность и теоретически неограниченные возможности повышения точности конечных результатов (Гофман-Велленгоф, 2007; Бровар, 1996; Голленко, 1965; Антонович, 2005; Грушинский, 1963; Двудит, 1988).

Интегральные оценки, выполненные В.В. Броваром, показали, что вычисления трансформант гравитационного поля по формулам, использующим чистые аномалии силы тяжести, снижают ошибки аномалии высоты и составляющих уклонения отвеса почти в два раза, относительно вычислений, выполненных по смешанным аномалиям (Мазурова, 2005:3-9; Bingham, 1967; Bold, 1985).

Таким образом, первым путем повышения точности вычисления указанных трансформант является определение их по формулам, позволяющим использовать чистые аномалии силы тяжести, которые являются функцией широты, долготы и геодезической высоты. Для вычисления аномалии высоты – это интеграл Неймана, а для вычисления составляющих уклонения отвеса – это модифицированный интеграл Венинг-Мейнеса.

Дальнейшее повышение точности вычисления указанных трансформант связано с методом вычислений.

Классические методы определения трансформант гравитационного поля, основанные на интегральных формулах, не учитывают, что исходная информация дискретна, отягощена ошибками измерений и известна не на всей поверхности Земли.

Современный подход, основанный на использовании дискретных линейных преобразований, использует тот факт, что известные интегралы Стокса, Неймана, Венинг-Мейнеса, модифицированный интеграл Венинг-Мейнеса, а также последующие члены классических рядов

Молоденского являются интегралами свертки. Методы современной вычислительной математики, такие как оконные преобразования Фурье (ОПФ) или дискретное преобразование Хартли (ДПХ), предназначены для вычисления сверток. Несмотря на существенное преимущество этого подхода перед классическими методами, отметим, что методы ОПФ и ДПХ не лишены ряда недостатков.

В настоящее время широкое распространение для решения задач спектрального анализа получил метод вейвлет-преобразования, который, на наш взгляд, более оптимален, лишен ряда недостатков, присущих ОПФ и ДПХ, и может быть использован для вычисления интегралов свертки. Несмотря на то, что математический аппарат вейвлет-анализа достаточно хорошо разработан и теория, в общем, оформилась, вейвлеты оставляют обширное поле для исследований (Fontana, Cheung, Stansell, 2001; Forsberg, Tscherning, 1981).

Материалы и методы

Объект исследования

Все существующие методы определения трансформант в современных исследованиях гравитационного поля можно разделить на классические и современные. В основе классических методов лежат интегральные формулы, которые требуют непрерывной гравиметрической информации, что практически невозможно.

На практике исходная информация дискретна, отягощена ошибками измерений и известна не на всей поверхности Земли.

Методы исследования.

В настоящее время разработано достаточно много современных методов определения трансформант гравитационного поля, в которых основные усилия направлены на учет специфики реальных данных. К таким методам относятся: вариационный, метод коллокации, метод сверток на основе линейных дискретных преобразований (например, быстрое преобразование Фурье) и др (Агурок, 1985). Естественно, что все они имеют свои недостатки и преимущества.

Например, метод коллокации с математической точки зрения определяет функции путем подбора аналитической аппроксимации к определенному числу заданных линейных функционалов (Колмогоров, Фомин, 1976).

Большую роль данный метод играет при решении интерполяционных задач с дальнейшим обобщением теории коллокации, в частности, связано с применением ее к объектам стохастической природы, когда под «коллокацией» понимается обобщение метода наименьших квадратов на случай бесконечномерных гильбертовых пространств Г. Мориц (Moritz, 1978).

Практическая реализация коллокационных моделей опирается на связь теории гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром с ковариационной теорией случайных процессов.

Ковариационные функции (автоковариационные и взаимные ковариационные) исследуемых случайных процессов, также как и воспроизводящее ядро при функциональном подходе, играют основополагающую роль в коллокационных моделях.

Метод коллокации, в приложении к задачам физической геодезии, развит в работах зарубежных (Moritz, 1977, Moritz, 1973 Moritz 1971), Г. Бальмино (Balmino, 1978), С. Чернингом (Tscherning, 1973), Е. Экером (Ecker, 1976), Е. Графарендом (Grafarend, 1978), Х. Сюнкелем (Siinkel, 1978) и Российских ученых В.В. Броваром (Бровар, Чеснокова, 1990), Ю.М. Нейманом (Нейман, 1979), В.А. Бывшевым (Бывшев, 1989).

Еще одним методом определения является вариационный метод регуляризации, т.е. поставленной корректно, если ее решение существует, единственно и устойчиво (корректность по Ж. Адамару (2003)). Если хотя бы одно из выше перечисленных условий не выполняется, задача называется некорректной. Для решения таких задач была создана теория приближенных методов решения некорректных задач, которая была развита в трудах российских ученых А.Н. Тихонова и В.Я. Арсенина (Тихонов, Арсенин, 1986); М.М. Лаврентьева (Лаврентьев, Романов, Шишатский, 1980) и многих других.

В цифровой обработке сигналов используют, как правило, дискретное представление сигналов, дискретные линейные преобразования, математика дискретных преобразований зародилась в недрах аналоговой математики в 18 веке, главным образом, в теории рядов и их применении для аппроксимации функций. Но широкое распространение и развитие получила только в 20 веке с появлением ЭВМ. В принципе, в своих основных положениях математиче-

ский аппарат дискретных преобразований подобен преобразованиям аналоговых сигналов и систем. Однако дискретность данных вносит свою специфику в обработку и требует учета этого фактора.

Игнорирование дискретности может приводить к существенным ошибкам. Кроме того, ряд методов дискретной математики не имеет аналогов в аналитической математике.

Важным способом анализа дискретных последовательностей является z-преобразование. Впервые z-преобразование введено в употребление П. Лапласом в 1779 г. и повторно «открыто» В. Гуревичем в 1947 году с изменением символики на z-k, однако и данные методы имеют свои недостатки.

Поэтому, исследователи были на пути поиска преобразования, лишённого данных недостатков. В настоящее время в области решения задач спектрального анализа активно используется вейвлет-преобразование (ВП), которое также подчиняется принципу неопределенности Гейзенберга, но обладает свойствами многомасштабности. ВП имеет хорошее разрешение во временной области и плохое в частотной на высоких частотах, но плохое разрешение во временной области и хорошее в частотной на низких частотах, что позволяет использовать эффективное окно во всем частотно-временном диапазоне (Астафьева, 1996; Сонечкин, Даценко, 1997).

Результаты и обсуждения

Английское слово wavelet (от французского «ondelette») дословно переводится как «короткая (маленькая) волна». В различных переводах зарубежных статей на русский язык встречаются еще термины: «всплеск», «всплесковая функция», «маловолновая функция», «волночка».

По теоретической основе вейвлет-преобразования произвольной функции выполняется условие

$$\int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt < \infty \quad (1)$$

тогда данная функция $f(t)$ может быть представлена ортогональной системой функций $\{\varphi_n(t)\}$ то есть

$$f(t) = C_0\phi_0(t) + C_1\phi_1(t) + \dots + C_n\phi_n(t) + \dots \sum_{n=0}^{\infty} C_n\phi_n(t) \quad (2)$$

Главными признаками вейвлета являются признаки, характерные для вейвлет-преобразования ограниченность.

В качестве системы ортогональных функций часто берут гармонические функции. Для представления непрерывных функций используются полиномы и функции Лагера, Лежандра, Эрмита, Чебышева и др. Для представления функций, имеющих разрывы, используют функции Уолша, Хаара, Радемахера. В последние годы широко используются базисные функции типа вейвлетов (маленькой волны).

Истоками вейвлетов считают работы Карла Вейерштрасса, описавшего в конце 19 века семейство функций, построенных путем наложения масштабированных копий базовой функции. Свое дальнейшее развитие вейвлеты получили в начале двадцатого века в трудах венгерского математика Альфреда Хаара (Haar, 1910), впер-

вые построившего ортонормированную систему функций с компактным носителем, которую называют базисом Хаара. В 1946 году Дэннис Габор (Gabor, 1946) дал описание неортогональному базису вейвлетов с неограниченным носителем, основанном на сдвинутых относительно друг друга гауссианах.

Систему ортогональных функций Хаара можно использовать в качестве базисной при разложении в равномерно сходящийся ряд Хаара непрерывного сигнала, заданного на отрезке.

Например на практике известны два вейвлета Хаара. Носитель более «узкого» вейвлета полностью содержится в интервале, на котором более «широкий» вейвлет равен постоянной. Базис Хаара известен с 1910 года, функция Хаара не обладает хорошей частотно-временной локализацией.

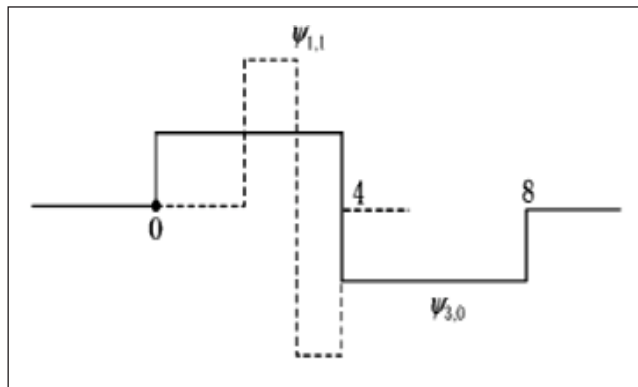


Рисунок 1 – Вейвлеты Хаара

В данном случае рассматривается любой интервал (α, β) вещественной оси как сетка координат:

$$X: \dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots \quad (3)$$

Весомый вклад в теорию вейвлетов внесли Гроссман и Морле (Grossman, Morlet 1984), разработавшие непрерывное вейвлет-преобразование. Жан Олаф-Стромберг (Stromberg, 1981) одним из первых выполнил работы по дискретным вейвлетам. Ингрид Добеши (Добеши, 2001) разработала ортогональные вейвлеты с ком-

пактным носителем, вычисляемые итерационным путем. И. Мейер (Meyer, 1993) и С. Малла (Mallat, 1989) предложили кратномасштабный метод. Н. Делпрат, Б. Эскуде, П. Джуллеман, Р. Кронлэнд-Мартинет, Р. Чамитчен, Б. Торресани создали временно-частотную интерпретацию непрерывного вейвлет-преобразования, Ньюланд разработал преобразование, в котором ортонормированный базис вейвлетов выводится из специальным образом построенных фильтров типа «top-hat» в частотной области.

Из Российских ученых, работающих в области теории вейвлетов, нужно отметить С.Б. Стеч-

кина, И.Я. Новикова (Новиков, Стечкин, 1998), В.И. Бердышева, Л.В. Петрака (Бердышев, Петрака 1999) и др. В данной статье рассматриваются лишь аналитический обзор опыта применения функции вейвлет-преобразования в разработке модели квазигеоида.

Заключение

В настоящее время теория вейвлет-преобразований продолжает бурно развиваться в трудах многих ученых и стало мощным математическим инструментом для решения многих практических приложений, сделало возможным получение новых подходов для решения таких задач, как анализ разного рода информации, сжатие и восстановление данных, увеличение производительности вычислений, кодирование информации и многих других.

Использование вейвлет-преобразования позволило, конечно же, не заменить в полной мере

известные ранее преобразования Фурье, Лапласа, Хартли и другие, но, как минимум, представить другой подход решения проблем. Так уже почти тридцать лет оно проникает в самые разные виды деятельности человека: геодезия, астрономия, геофизика, обработка и сжатие изображений, кодирование информации и др. Вейвлеты весьма перспективны в решении многих математических задач, таких как интерполяция, аппроксимация, регрессия и т.д. Непрерывное ВП нашло широкое применение в обработке сигналов. В частности, вейвлет-анализ (ВА) дает уникальные возможности распознавать локальные и «тонкие» особенности сигналов (функций), что важно во многих областях радиотехники, связи, радиоэлектроники, геофизики и других отраслях науки и техники.

Использование в данных областях вейвлет-преобразования не ограничивается чисто теоретическими выкладками, а имеет конкретный прикладной характер.

Литература

- Антонович К.М. Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии: В 2 т. Т. 1: Монография / ГОУ ВПО «Сибирская государственная геодезическая академия». – М.: Картогеоцентр, 2005. – 334 е.: илл.
- Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // УФН. – 1996. – Т.166. – № 11. – С. 1145-1170.
- Агурок И.П. Использование алгоритма быстрого преобразования Фурье для ускорения быстрой интерполяции Котельникова // Изв. вузов, Приборостроение, 1985, №9. – С. 35-38.
- Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов. – М.: Наука, 1975. – 632 е.: ил.
- Бердышев В.И., Петрака Л.В. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения. – Екатеринбург: УрО РАН, 1999. – 279 с.
- Бровар В.В., Чеснокова Т.С. Аппроксимационные формулы для вычисления возмущающего потенциала и его производных в приближении Стокса // Труды государственного астрономического института им. П.К. Штенберга. – 1990. – Т. 61. – С. 141-185
- Бровар, В.В. Крещению краевой задачи Молоденского с относительной погрешностью 5-Ю-5. / В.В. Гофман-Велленгоф, Б. Физическая геодезия: учебник / пер. с англ. Ю.М. Неймана, Л.С. Сугаиповой. – М.: МИИГАиК, 2007. – 426 с.: илл.
- Бровар // Научно-технический сборник по геодезии, аэрокосмическим съемкам и картографии. Физическая геодезия. Кн. 2. – М.: ЦНИИГАиК, 1996. – С. 156-164.
- Бывшев В.А. Уточнение теории и алгоритмов средней квадратической коллокации // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – №6, 1989. – С. 9.
- Голенко, Д.И. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах. – М.: Наука, 1965. – 227 с.
- Грушинский, Н.П. Теория фигуры Земли. / Н.П. Грушинский. – М.: Физматгиз, 1963. – 448 е.: илл.
- Демьянов Г.В. Построение общеземной системы нормальных высот. // Геодезия и картография. 2009. – №1. – С. 12-16.
- Двулит, П.Д. Сезонные деформации урвонной поверхности, обусловленные снежным покровом // Тезисы докладов. Симпозиум Комиссии Академии Планетарной Геофизики по изучению движения земной коры. – Воронеж, 1988. – С. 95-96.
- 32 Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
- Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
- Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 288 с.
- Мазурова Е.М. О сравнении эффективности быстрого дискретного преобразования Фурье и быстрого дискретного преобразования Хартли // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – №1. – 2005. – С. 3-9.
- Нейман Ю.М. Вариационный метод физической геодезии. – М.: «Недра», 1979. – 200 с. (1980, 2, 52, 59).
- Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Основы теории всплесков // Успехи математических наук. 1998. – Т. 53. – № 6 (324). – С. 53-128.
- Сонечкин Д.М., Даценко Н.М., Иващенко Н.Н. Оценка тренда глобального потепления с помощью вейвлетного анализа // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. – 1997. – Т.33. – № 2. – С. 184-194.

- Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 3-е издание, 1986. – 288 с.
- Bingham, C., M.D. Coddrey, Y.W. Tukey. Modern Techniques of Power Spectrum Estimation// IEEE Transaction on Audio and Electroacoustics, 1967, Vol.AU-15, №2, pp.56-66.
- Bold J. A comparison of the time involved in computing fast Hartley and Fourier transform// Proc.IEEE, 1985, Vol.73,pp. 1863-1864.
- Balmino G. Introduction to Least – Squares Collocation // Approximation Methods in Geodesy», ed. H. Moritz, H. Sunkel. AAA. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1978.
- Gabor D. Theory of communication. J. IEE, 93:429-457, 1946
- Grossman A. and Morlet J. Decomposition of Hardy function into square integrale wavelets of constant shape. SIAM J. Of Math. Anal., 15(4), pp.723-736, July 1984.
- Grafarend E.W. Operational geodesy. «Approximation methods in geodesy», ed. by H. Moritz, H. Sunkel. Herbert Wichmann Verlag. Karlsruhe, 1978.
- Ecker E. Boundary value problems for the sphere. «Boll. geod. e sci. affini», 1976, 35, № 2, 185-224 (1977, 3.52.62)
- Fontana RD, Cheung W, Stansell T (2001): The modernized L2 civil signal. GPS World. 12(9): 28 34.
- Forsberg R. Tscherning CC (1981): The use of height data in gravity field approximation by collocation. Journal of Geophysical Research, 8G (B9): 7843-7854.
- Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. IEEE Transactions Analysis and Machine Intelligence, 11(7): 674-693, July 1989.
- Meyer Y. Wavelets: Algorithms and Applications. SIAM, 1993. Translated and revised by R. D. Ryan.
- Moritz H. Least-Squares Collocation // Reviews of Geophysics and Space Physics. Vol. 16. No.3. August 1978. pp. 421-430.
- Moritz H. Least-squares collocation and the gravitational inverse problem «J. Geophys.» 1977, p. 43.
- Moritz H. Least-squares collocation. «Veroff Dtsch. Geod. Kommis. Bayer Akad.Wiss.», 973, A, № 75, 91 pp. (1974, 6.52.94
- Tscherning C.C. Application of collocation. Lecture notes. Ramsau, 1973
- Siinkel H. Covariance approximations. Presented at the 7th symposium on mathematical geodesy. Assisi, 1978, Italy
- Stromberg J. O. A modified Franklin system and higher order spline systems on R_n as unconditional bases for Hardy spaces. In W. Beckner, R. Fefferman, and P.W. Jones, editors, Proc. Conf. in Honor of Antoni Zygmund, volume II, pages 475-493, New York, 1981.
- Haar A. Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme. Math. Ann., 69, 1910, pp.331-371.

References

- Antonovich, K.M. (2005) Ispol'zovanie sputnikovyh radionavigacionnyh sistem v geodezii (The use of satellite radio navigation systems in geodesy): v 2t. T.1: Monografiya /GOU VPO «Sibirskaya gosudarstvennaya geodezicheskaya akademiya». M.: Kartgeocentr.-S. 334.
- Astaf'eva N.M. (1996) Veyvlet-analiz: osnovy teorii i primery primeneniya (Wavelet analysis: theory bases and examples of application) //UFN. -. – T.166. – № 11. – S. 1145-1170.
- Agurok I.P. (1985) Ispol'zovanie algoritma bystrogo preobrazovaniya Fur'e dlya uskoreniya bystroj interpolyazii Kotel'nikova (Using the Fast Fourier Transformation algorithm to speed up Kotel'nikov's rapid interpolation) // Izv. vuzov, Priborostroenie, №9, S. 35-38.
- Bahvalov, N.S. (1975) Chislennye metody (Numerical methods). / N.S. Bahvalov. M.: Nauka,. – S. 632.
- Berdyshev V.I., Petrak L.V. (1999) Approksimaciya funkcij, szhatie chislennoj informacii, prilozheniya (Approximation of functions, compression of numerical information, applications) /Ekaterinburg UrO RAN,. S. 279.
- Brovar, B.B. (1996) K resheniyu kraevoj zadchi Molodenskogo sotnositel'noj pogreshnost'yu 5-YU-5 (To the solution of the marginal tail of Molodensky with the error of 5-Ю-5). / V.V. Brovar // Nauchno-tehnicheskij sbornik po geodezii, aehrokosmicheskim s'emkam i kartografii. Fizicheskaya geodeziya. Kn. 2. M.: CNIIGAiK,. – S. 156-164.
- Brovar V.V., Chesnokova T.S. (1990) Approksimacionnye formuly dlya vychisleniya vozmushchayushchego potentsiala i ego proizvodnyh v priblizhenii Stoksa (Approximation formulas for calculating the perturbing potential and its derivatives in the Stokes approximation) // Trudy gosudarstvennogo astronomicheskogo instituta im. P.K. Shtenberga, , t. 61, S. 141-185
- Brovar (1996) Nauchno-tehnicheskij sbornik po geodezii, aehrokosmicheskim s'emkam i kartografii. Fizicheskaya geodeziya. Kn. 2. M.: CNIIGAiK,. – S. 156-164.
- Byvshev V.A. (1989) Utochnenie teorii i algoritmov srednej kvadratichejskoj kollokacii // Izv. vuzov. Geodeziya i aehrofotos'yomka. – №6, S. 9
- Golenko, D-I. (1965) Modelirovanie i statisticheskij analiz psevdosluchajnyh chisel na ehlektronnyh vychislitel'nyh mashinah (Modeling and statistical analysis of pseudo-random numbers on electronic computers). / D.I. Golenko M.: Nauka,. – S. 227.
- Grushinskij, N.P. (1963) Teoriya figury Zemli (Theory of the figure of the Earth). /-M.: Fizmatgiz,. S. 448.
- Dem'yanov, G.V. (2009) Postroenie obshchezemnoj sistemy normal'nyh vysot (The construction of a general earth system of normal heights) // Geodeziya i kartografiya. -.№.1. – S. 12 – 16.
- Dvulit, P.D. (1988) Sezonnnyye deformacii urovnennoj poverhnosti, obuslovlennyye snezhnym pokrovom (Seasonal deformations of the level surface due to the snow cover). / P.D. Dvulit, B.L. Skuin // Tezisy dokladov. Simpozium Komissii Akademii Planetarnoj Geofiziki po izucheniyu dvizheniya zemnoj kory. Voronezh,. – S. 95-96.
- Dobeshi I. (2001) Desyat' lekcij po veyvletam (Ten lectures on wavelets). // Izhevsk: NIC “Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika”, S. 464.

- Kolmogorov A.N., Fomin SV. (1976) Ehlementy teorii funkciy i funkcional'nogo analiza (Elements of the theory of functions and functional analysis). -M.: Nauka, -S. 544.
- Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., S Hishatskij SP. (1980) Nekorrektnye zadachi matematicheskoy fiziki i analiza (Ill-posed problems of mathematical physics and analysis). M.: Nauka, S. 288.
- Mazurova E.M. (2005) O sravnenii ehffektivnosti bystrogo diskretnogo preobrazovaniya Fur'e i bystrogo diskretnogo preobrazovaniya Hartli (On the comparison of the efficiency of a fast discrete Fourier transform and the fast discrete Hartley transformation) //Izv. vuzov. Geodeziya i aehrofotos'emka, №1 -S. 3-9.
- Nejman YU.M. (1980) Variacionnyj metod fizicheskoy geodezii// M., «Nedra», 1979, 200 s.
- Novikov I. YA., Stechkin S B. (1998) Osnovy teorii vspleskov (Fundamentals of the theory of wavelets)// Uspekhi matematicheskikh nauk.. T. 53. № 6 (324). S. 53-128.
- Sonechkin D.M., Dacenko N.M., Ivashchenko N.N. (1997) Ocenka trenda global'nogo potepneniya s pomoshch'yu vejvletnogo analiza (Evaluation of the global warming trend using wavelet analysis) // Izv. RAN. Fizika atmosfery i okeana. - - T.33. - № 2. - S.184-194.
- Tihonov A.N. i Arsenin V.YA. (1986) Metody resheniya nekorrektnykh zadach// M., Nauka, 3-e izdanie., S.288.
- Bingham, C., M.D. Codfrey, Y.W. (1967) Tukey. Modern Techniques of Power Spectrum Estimation// IEEE Transaction on Audio and Electroacoustics, , Vol.AU-15, №2, - P.56-66.
- Bold J. A (1985) comparison of the time involved in computing fast Hartley and Fourier transform// Proc.IEEE, , Vol.73 - P. 1863-1864.
- Balmino G. (1978) Introduction to Least - Squares Collocation// Approximation Methods in Geodesy", ed. H. Moritz, H. Sunkel. AAA. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe.
- Gabor D. (1946) Theory of communication. J. IEE, 93:429-457.
- Grossman A. (1984) and Morlet J. Decompositon of Hardy function into square integrale wavelets of constant shape. SIAM J. Of Math. Anal., 15(4), pp.723-736, July.
- Grafarend E.W. (1978) Operational geodesy. «Approximation methods in geodesy», ed. by H. Moritz, H. Sunkel. Herbert Wichmann Verlag. Karlsruhe.
- Ecker E. (1977) Boundary value problems for the sphere. «Boll. geod. e sci. affini», 1976, 35, № 2, 185-224
- Fontana RD, Cheung W, Stansell T (2001): The modernized L2 civil signal. GPS World. 12(9): 28 34.
- Forsberg R. Tscherning CC (1981): The use of height data in gravity field approximation by collocation. Journal of Geophysical Research, 8G (B9): 7843-7854.
- Mallat S. A (1989) theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. IEEE Transactions Analysis and Machine Intelligence, 11(7): 674-693, July.
- Meyer Y. Wavelets: Algorithms and Applications. SIAM, 1993. Translated and revised by R. D. Ryan.
- Moritz H. (1978) Least-Squares Collocation // Reviews of Geophysics and Space Physics. Vol. 16. No.3. August. P. 421-430.
- Moritz H. (1977) Least-squares collocation and the gravitational inverse problem «J. Geophys.», P. 43.
- Moritz H. (1974) 6.52.94 Least-squares collocation. «Veroff Dtsch. Geod. Kommis. Bayer Akad.Wiss.», 973, A, № 75, 91 pp
- Tscherning C.C. (1973) Application of collocation. Lecture notes. Ramsau
- Siinkel H. (1978) Covariance approximations. Presented at the 7th symposium on mathematical geodesy. Assisi, Italy
- Stromberg J. O. (1981) A modified Franklin system and higher order spline systems on Rn as unconditional bases for Hardy spaces. In W. Beckner, R. Fefferman, and P.W. Jones, editors, Proc. Conf. in Honor of Antoni Zygmund, volume II, pages 475-493, New York.
- Haar A. (1910) Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme. Math. Annal., 69, P. 331-371.

