

Сарыбаев Е.С.

**Модель распределения для
крайне асимметричных типов
формообразования частот
значений геопризнаков**

В статье раскрываются статистическо-геометрические закономерности Ципфа, крайне асимметричных типов формообразования рельефа, вероятностных частот появления их геопризнаков. Сложная комплексированная закономерность включает в себя экспоненциальную и гиперболическую формы вероятностных частот. Исходя из особенностей модели рельефа, для параметризации использована медиана и модальная частотность распределения геопризнаков. Построена структура рекомендуемой модели рельефообразования и выведены расчетные формулы определения их статистических параметров. По результатам апробации модели эмпирических и морфометрических признаков по сложным признакам рельефообразования местности можно определить качественные показатели рельефа золоторудных и редкометальных месторождений.

Ключевые слова: модель, крайне асимметрическая, распределение, оценка, параметр, георесурсы.

Sarybaev Y.S.

**Distribution Model for the
Extremely Asymmetric Types
of Formation of geofeatures'
Frequency Values**

The article reveals the statistical geometric patterns Zipf extremely asymmetrical-type shaping of the relief, the probability of their frequency of occurrence geoprznakov. A complex pattern of complexed includes an exponential and hyperbolic form of probability frequencies. Based on the features of the terrain model used to parameterize the median and the modal frequency distribution of geoprznakov. Build structures of recommended models and derived formulas determining statistical parameters. According to the results of testing distribution model as an example of the complex empirical and morphometric characters featured their complex terrain relief formation can determine quality indicators reliefs of gold and rare metal deposits.

Key words: model, extremely-asymmetric distribution, evaluation, parameter, georesource.

Сарыбаев Е.С.

**Геобелгілер мәні жиіліктерінің
қалыптасуының
шекті - асимметриялық түрлері
үшін арналған таралу
заңдылықтарының моделі**

Мақалада Ципфтың статистикалық – геометриялық заңдылықтары, жер бедері қалыптасуының шекті – асимметриялық түрлері, олардың геобелгілерінің пайда болуының ықтимал жиіліктері қарастырылады. Күрделі жиынтықты заңдылықтарға ықтимал жиіліктердің экспоненциалды және гиперболалық формалары кіреді. Жер бедері үлгісінің ерешеліктеріне сүйене отырып параметрлеу үшін геобелгілерді бөлудің медианасы және үлгілік жиілік қолданылған. Жер бедері қалыптасуының ұсынылған құрылымы құрастырылды және олардың параметрлерін анықтаудың есептемелік формулалары шығарылды. Жергілікті жердің жер бедері қалыптасуының күрделі белгілері бойынша эмпирикалық және морфометриялық белгілерінің үлгілерін анықтау нәтижесі негізінде алтынкенді және сирек металдық кен орындарының жер бедерінің сапалық көрсеткіштерін анықтауға болады.

Түйін сөздер: модель, шекті-асимметриялық, таралу заңдылықтары, бағалау, параметр, георесурс.

**МОДЕЛЬ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ
КРАЙНЕ
АССИМЕТРИЧНЫХ
ТИПОВ ФОРМООБ-
РАЗОВАНИЯ ЧАСТОТ
ЗНАЧЕНИЙ
ГЕОПРИЗНАКОВ**

Введение

Обоснование рациональной модели распределения рельефообразования осуществляется путем обобщения особенностей объектов георесурсов различной сложности. По результатам анализа практики крайне ассиметричных типов эмпирических распределений устанавливаются максимальные высоты рельефа и высоты равномерно расположенных точек в горных и предгорных районах, а также распределение качественных показателей золоторудных и редкометалльных месторождений по типу их распределения. Теоретические распределения, удовлетворительно описывающие многообразие формообразования, малочисленны и неизвестны.

Статистическо-геометрические закономерности Ципфа, крайне ассиметричных типов формообразования рельефа, вероятностных частот появления их геопризнаков являются сложной закономерностью и включают в себя экспоненциальную и гиперболическую формы вероятностных частот. Исходя из особенностей модели рельефа, для параметризации используется медиана и модальная частотность распределения их геопризнаков. Главные структурообразующие параметры рельефообразования в виде медианы и модальной частотности имеют построение с привлечением новых теоретических расчетных формул определения статистических параметров и проведением апробации модели.

Параметризация модели распределения

Многообразие видов эмпирических крайне ассиметричных распределений геологических и морфометрических признаков рельефообразования позволяет разрабатывать модели их распределения, наиболее отвечающие их геопризнакам. Для параметризации структуры искомой модели крайне ассиметричного формообразования частот принимается принцип использования положительных свойств основных вероятностных распределений часто описывающих эмпирических распределений геопризнаков.

Как показывает анализ практики, для оценки крайне асимметричных распределений геопризнаков рельефообразования следует относить показательное, вероятностно-структурное распределение и закон Ципфа. В связи с этим изучаются различные статистико-геометрические свойства, присущие этим вероятностным распределениям. Показательные распределения на сегодняшний день являются основными и часто используемыми для описания крайне асимметричных типов, эмпирических распределений. Основные теоретические вероятностные распределения, описывающие умеренно асимметричные типы распределений при конкретных значениях своих параметров рельефа сводятся к показательным распределениям, совпадающим с гамма-распределением (при $p=1$), распределением Вейбулла (при $m=1$, $V=100\%$) и Пирсона (при $b=b_2=0$, $\mu_3=0$).

По результатам оценки аппроксимационных свойств теоретических распределений устанавливаются основные закономерности развития вероятностных частот крайне асимметричных типов формообразования частот геопризнаков:

- развитие формообразования вероятностных частот по крайне асимметричным типам распределений экспоненциального и гиперболического характера;

- развитие формообразования частот по крайне асимметричным типам распределений в соответствии с гиперболической закономерностью.

Параметризация разрабатываемой модели распределения осуществляется путем обобщения особенностей крайне асимметричных типов распределений признаков по объектам георесурсов различной сложности рельефообразования. По результатам анализа практики использования крайне асимметричных типов эмпирических распределений установлено, что теоретические распределения, удовлетворительно описывающие многообразие формообразования частот, изменяются в широких диапазонах и малочисленны. Выявлено, что распределения качественных показателей золоторудных и редкометальных месторождений для максимальных высот рельефа и точек равномерно расположенных в горных и предгорных районах часто соответствуют крайне асимметричным ти-

пам и отличаются разнообразием геометрии кривых.

Проведенная оценка закономерностей крайне асимметрических эмпирических распределений признаков по объектам георесурсов вероятностно-структурного распределения Ципфа присуща закономерности экспоненциального и гиперболического характера. Эти закономерности часто отражаются в форме экспоненты $e^{-\lambda x}$ при показательном, а иногда $e^{-m(x-x_0)}$ – при вероятностно-структурном распределении, и редко в форме $\frac{A}{x}$ – при распределении Ципфа. Закономерности развития вероятностных частот в форме $e^{-\lambda x}$, согласно показательному распределению, зависят только от одного теоретического параметра λ . Это создает аппроксимационную ограниченность для учета статистического диапазона формообразования частот распределения, и какое бы значение не приобрел параметр λ , это ограничение остается не устраненным. Закономерность развития вероятностных частот в форме $e^{-m(x-x_0)}$ является двухпараметрической и жестко связана с модой признака, однако значения моды признака в условиях крайне асимметричных типов формообразования частот обычно близки к нулю и теряют полезные свойства. Закономерность развития вероятностных частот в форме $\frac{A}{x}$ согласно закону распределения Ципфа обладает значительным недостатком, вытекающим из-за используемости в ней одного параметра A и гиперболической функции, которая не обладает высокой эластичностью, как экспоненциальная функция.

Теория построения аналитической структуры модели распределения основана на руководящей концепции использования главных структурообразующих параметров крайне асимметричных типов распределений в качестве теоретических параметров искомой функции распределения [1, 2]. В качестве теоретических параметров рекомендуемой модели распределения выбраны медиана, модальная частота с привлечением множительного коэффициента (c). Медиана в качестве параметра модели распределения выбрана исходя из ее положительных свойств параметров-показателей. Медиана как основная структурно-статистическая характеристика распределения заменяет роль величины среднеарифметического отклонения и дисперсии в качестве основной оценки. Как

известно, медиана – это значение случайной величины, которое делит распределение на две равные части, находится на кривой распределения вероятностей при $P_m = 0.5$. Соответственно медиана тесно связана с формой кривой распределения.

Медиана является более точной по сравнению со среднеарифметическими расчетами [3]:

- значение медианы остается неизменным при конкретной величине по их функциям, что немного упрощает вычислительные процедуры и облегчает оценку статистики случайных величин;

- величина медианы более устойчива в статистических выборках с эксцессом, чем у нормального закона распределения, поскольку медиана делит площадь распределения вероятности на две равные части, её значение сохраняет устойчивость при различных изменениях кривой распределения;

- значение медианы в незначительной степени по сравнению со среднеарифметическим подвергается влиянию погрешностей, т.е. при систематических погрешностях и при значениях признаков, близких к порогу чувствительности; это свойство медианы важно для использования оценки закономерностей распространения геопризнаков, которым присущи специфические природные сложности;

- главное и важное свойство величины медианы заключается в том, что ее значение может быть рассчитано с достаточной достоверностью при наличии статистической совокупности численно неопределенных или приближительных значений величин, а также при наличии различных аномальных (ураганных, слабых и т.д.) значений.

Из анализа вышеприведенных источников можно сделать заключение, что для получения устойчивых результатов в случаях, когда исходные данные содержат существенные аналитические погрешности, могут быть использованы оценки других математических

характеристик. Для этой цели рекомендуется использовать медиану случайных величин.

Второй параметр распределения модальной частоты распространения признака для конкретно исследуемого объекта является информативной величиной и имеет важное теоретическо-практическое значение, служит стержневым каркасом формообразования частот переменного при прогнозных оценках и вероятностных подходов. Сочетание свойств медианы и модальной частоты переменного направлено на повышение достоверности оценки пространственно-статистических закономерностей распространения геопризнаков, которые отличаются природными специфическими особенностями рельефообразования.

Аналитические основы модели крайне асимметричного типа распределения геопризнаков

Плотность функции статического распределения по рекомендуемой новой модели, названной «медианной», имеет вид

$$\begin{cases} f(x) = f_0 e^{-c\left(\frac{x}{Me}\right)} \\ x > 0 \end{cases} \quad (1)$$

где f_0 – модальная частота распределения изучаемого признака;

c – статистический параметр;

$\frac{x}{Me}$ – значение признака (x) в долях медианы (Me).

Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \frac{f_0}{c} \left[1 - e^{-c\left(\frac{x}{Me}\right)} \right], \quad 0 < x < \infty \quad (2)$$

Плотность функции распределения тесно связана с статистическим параметром c и в зависимости от его значений кривая приобретает различные формы (рисунок 1).

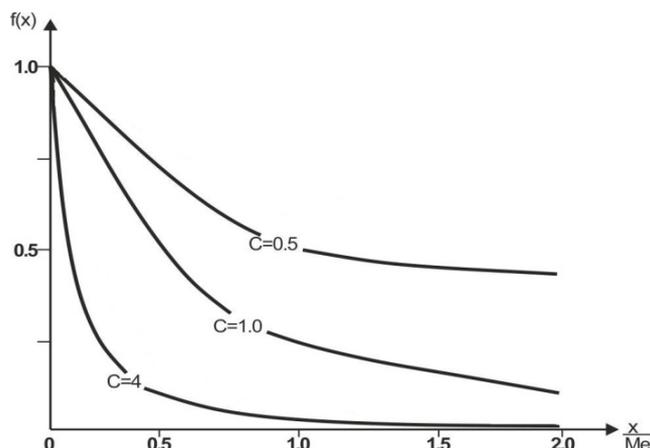


Рисунок 1 – Характер изменения плотности функции распределения в зависимости от параметра c

Кривая функции распределения тождественна с развитием кривых радиальных типов распределений (рисунок 2).

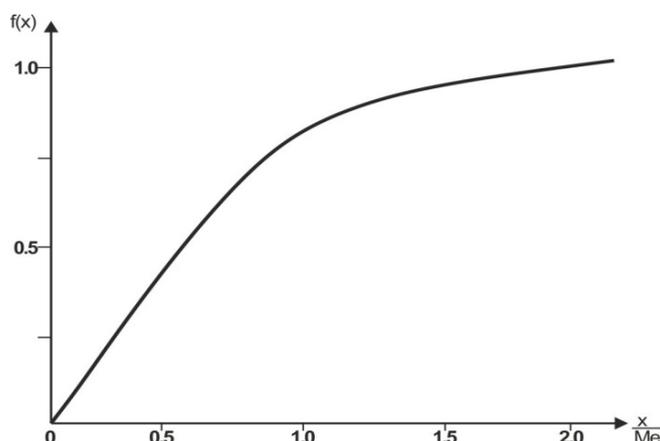


Рисунок 2 – Кривая функции распределения $F(x)$

Основной статистической характеристикой распределения является математическое ожидание:

$$M_0 = f_0 \frac{1}{c^2} \quad (3)$$

Среднее значение:

$$x_{\text{ср}} = f_0 \frac{1}{c} \quad (4)$$

Дисперсия:

$$\begin{cases} D = f_0 \frac{1}{c^2} (3\bar{x} - 2) \\ D = M_0 (3\bar{x} - 2) \end{cases} \quad (5)$$

Стандарт:

$$\begin{cases} \sigma = \frac{1}{c} \sqrt{f_0 (3\bar{x} - 2)}, \\ \sigma = \sqrt{(3\bar{x} - 2) M_0} \end{cases} \quad (6)$$

Медиана:

$$\begin{cases} Me = \frac{2}{3} ac \\ Me = \frac{x_0 + 2\bar{x}}{3} \end{cases} \quad (7)$$

Вывод формулы определения статистического коэффициента c осуществляется исходя из основного свойства суммы вероятностей:

$$c = f_0 Me, \quad \text{при } 0 < x < \infty$$

$$c \approx \frac{3Me}{2a} \quad \text{при } 0 < x < a \quad (8)$$

Установлено, что рекомендуемая модель распределения при конкретных значениях медианы признака сходится с показательным и вероятностно-структурным распределениями, связана с распределениями Парето, Эрланга и геометрическим распределением.

Расчетные формулы определения значений медианы по крайне асимметричным и асимметричным типам вероятностных распределений приведены в таблице 1.

Сравнительный анализ приемлемости рекомендуемой модели крайне асимметричного типа распределения

Сравнительная оценка приемлемости модели распределения проведена с привлечением самых разнообразных видов крайне асимметричных видов эмпирических распределений геопризнаков, построенных по фактическим статистическим совокупностям качественных показателей золоторудных, редкометальных, а также комплексом морфометрических признаков (высот, уклонов, площадей) различных местностей по регионам Казахстана. Анализ сходимости этих крайне асимметричных ви-

дов эмпирических распределений с известными теоретическими данными проводится с привлечением показательного и вероятностно-структурного распределения, закона Ципфа и рекомендуемого медианного распределения. Подсчитываются значения среднего (\bar{x}_{cp}), среднеквадратического отклонения (σ), амплитудной изменчивости (d) критерия Пирсона. По результатам сравнительной оценки установлено, что в долях рассмотренного количества этих совокупностей эмпирических распределений геопризнаков более 70% видов удовлетворительно, и точнее описываются рекомендуемой моделью, 20% показательны, остальные 10% описываются вероятностно-структурным и распределением Ципфа (таблица 2). Тем самым подтверждается обоснованность использования медианы и модальной частоты значений геопризнаков в качестве теоретических параметров новой модели распределения, по которым обеспечивается аппроксимационная мощность и гибкость при применении на практике для учета разнообразных видов крайне асимметричных распределений геопризнаков. Сходимость этой модели различными видами крайне асимметричных типов эмпирических распределений геопризнаков показывает о целесообразности ее применения для оценки сложных распределений.

Таблица 1 – Аналитические оценки определения медианы по основным крайне-асимметричным и асимметричным типам распределений

Крайне асимметричные типы распределения	Формула определения медианы	Асимметричные типы распределения	Формула определения медианы
Показательное распределение	$Me = \frac{1}{\lambda} \ln 2$	Распределение Вейбулла	$Me = \frac{1}{k} \bar{x}_{cp}$; $k = \varphi(v, p)$
Вероятностно-структурное распределение	$Me = \frac{\phi_0}{m} e^{mx_0}$	Гамма-распределение	$Me = \beta \cdot \ln 2$ $\beta_x = \frac{x}{a+1}$
Распределения Ципфа	$Me = \frac{1}{2} \ln \frac{x_{max}}{x_{min}}$	Логнормальное распределение	$Me = 10^{\ln \bar{x}}$
Рекомендуемое медианное распределение	$Me = \frac{2}{3} ac$ $a = x_{max}$	Распределение Пирсона при $f(x) = \gamma_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$	$Me = X_{m_0} = a$

Таблица 2 – Результаты натурно-экспериментального анализа сходимости основных распределений, приемлемых для оценки крайне асимметричных распределений геопризнаков

Натурно-экспериментальные варианты сравнительной оценки	Результаты сравнительной оценки распределений			
	Показательное распределение $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	Вероятностно-структурное распределение $f(x) = \Phi_0 e^{m(x-x_0)}$	Закон распределения Ципфа $f(x) = \frac{A}{x}$	Рекомендуемое «медианное» распределение $f(x) = f_0 e^{-c \frac{x}{Me}}$
Распределение высот рельефа (топоплан М:1:5000) N=1600; $\sigma=4,1$; $d=4,7$; $\bar{x} = 4.033$	$\bar{X} = 4,033$ $\lambda=0.10$ $\chi^2 = 35.6 > \chi^2_{доп}$	$x_0 = 1.5$ $\Phi_0 = 138$ $m=0.0122$ $N=630$ $\chi^2 = 11.4 > \chi^2_{доп}=11$	$\chi^2 > \chi^2_{доп}$	Me=2.4 $f_0=0.401$ $c=1.25$ $\chi^2 = 14.6 > \chi^2_{доп}$
Распределение элементарных площадей земельных участков (топоплан М:1:1000, Жамбылская область) N=1445; $\sigma=4,4$; $d=5.0$; $\bar{x} = 18.9$	$\bar{X} = 1.514$ $\lambda=0.661$ $\chi^2 = 20.1 > \chi^2_{доп}$	$x_0 = 6.0$ $m=0.0021$ $\Phi_0 = 360$ $N=930$ $\chi^2 = 11.9 > \chi^2_{доп}=12$	A=0,25 $\bar{X} = 1.2$ $\chi^2 = 48.1 > \chi^2_{доп}$	Me=4.3 $f_0=0.501$ $c=2.88$ $\chi^2 = 11.3 > \chi^2_{доп}$
Распределение значений заложения (топоплан М:1:10000, Алматинская область) N=445; $\sigma=7.8$; $d=4.5$; $\bar{x} = 20.0$	$\bar{X} = 12,2$ $\lambda=0.09$ $\chi^2 = 19.5 > \chi^2_{доп}$	$x_0 = 0.5$ $\Phi_0 = 360$ $m=0.155$ $\chi^2 = 15.5 > \chi^2_{доп}=15.65$	A=0,527 $\bar{X} = 12.2$ $\chi^2 = 40.7 > \chi^2_{доп}$	Me=0.529 $f_0=0.584$ $c=2.40$ $\chi^2 = 1.23 > \chi^2_{доп}$
Распределение золота в условиях Майкайнского золоторудного месторождения N=767; $\sigma=2,12$; $\bar{x}=2.4$	$\bar{X} = 2,4$ $\lambda=0,171$ $\chi^2 > \chi^2_{доп}$	$\Phi_0 = 447$ $m=0,49$ $\chi^2 = 28 > \chi^2_{доп}$	A=0,495 $\chi^2 = 31 > \chi^2_{доп}$	Me=1,6 $f_0=0.59$ $c=2.1$ $\chi^2 = 8,9 < \chi^2_{доп}$
Распределения золота в условиях Бакырчикского золоторудного месторождения N=532; $\sigma=1,434$; $\bar{x}=1,9$	$\bar{X} = 1,7$ $\lambda=0.105$ $\chi^2 = 9.5 > \chi^2_{доп}$	$\Phi_0 = 189$ $m=0,620$ $\chi^2 = 14,7 > \chi^2_{доп}$	$\chi^2 > \chi^2_{доп}$	Me=1,43 $f_0=0.36$ $\chi^2 = 9,0 < \chi^2_{доп}$
Распределение серебра в условиях Майкайнского золоторудного месторождения N=339; $\sigma=1,97$; $\bar{x}=29,5$	$\bar{X} = 30,1$ $\lambda=0,020$ $\chi^2 = 17 > \chi^2_{доп}$	$\Phi_0 = 70$ $m=0,035$ $\chi^2 = 16,5 > \chi^2_{доп}$	$\chi^2 > \chi^2_{доп}$	Me=28,9 $f_0=0.23$ $\chi^2 = 9,8 < \chi^2_{доп}$
Распределения свинца в условиях Карагалинского полиметаллического месторождения N=293; $\sigma=0,17$; $\bar{x}=0,17$	$\bar{X} = 0,169$ $\lambda=0,022$ $\chi^2 = 9,2 > \chi^2_{доп}$	$\Phi_0 = 168$ $m=3,72$ $\chi^2 = 7,6 < \chi^2_{доп}$	$\chi^2 > \chi^2_{доп}$	Me=0,25 $f_0=0.53$ $\chi^2 = 5,8 < \chi^2_{доп}$

Выводы

Распределения, используемые для описания крайне асимметричных формообразований частот качественных показателей золоторудных и редкометальных месторождений полезных ископаемых и морфометрических признаков сложнорельефной местности, малочисленны. В силу многообразия их форм часто используемые для их описания показательные и другие распределения не охватывают широкий диапазон изменяющихся видов крайне асимметричных распределений геопризнаков. Часто встречаются такие эмпирические крайне асимметричные распределения, установление сходности которых с каким-либо известным теоретическим распределением требует специального подхода.

В данных исследованиях подтверждается обоснованность концепции привлечения структурообразующих параметров эмпирического распределения переменного, в качестве теоретических параметров функции распределения для обеспечения эффективности оценки и использования распределения геопризнаков с достаточной достоверностью.

По результатам сравнительной оценки подтверждается, что предложенная модель распределения геопризнаков обладает аппроксимационной мощностью и гибкостью, что позволяет получить более достоверные результаты, уменьшить ошибки, допускаемые при малых значениях и значительной неопределенности статистической выборки для исследования геопризнаков.

Литература

- 1 Kurmankozhaev A.K. Stochastic-structural Model of Mineral Resources Indication Distribution XXII. International Symposium APCOM 17-21.9.1990, Berlin, West-Germany, 6 с.
- 2 Kurmankozhaev A.K. and Jumanov B.M. The structural and empiricel to estimate the distribution of quality indicators of minerals. 34-th International Geological Congress (IGC): Australia, Brisbane, 2012, 1 st.
- 3 Сымыслова А.А., Рудника В.А.(СССР) и Динкова Н.М., Панайотова А.И.(НРБ). Принципы и метод геохимических исследований при прогнозированим рудных месторождений. – Л.: «Недр», 1979. – 245 с.

References

- 1 Kurmankozhaev A.K. Stochastic-structural Model of Mineral Resources Indication Distribution XXII. International Symposium APCOM 17-21.9.1990, Berlin, West-Germany, 6 с.
- 2 Kurmankozhaev A.K. and Jumanov B.M. The structural and empiricel to estimate the distribution of quality indicators of minerals. 34-th International Geological Congress (IGC): Australia, Brisbane, 2012, 1 st.
- 3 Symyslova A.A., Rudnika V.A.(SSSR) i Dinkova N.M., Panajotova A.I.(NRB). Principy i metod geohimicheskikh issledovaniy pri prognozirovanim rudnyh mestorozhdenij. – L.: «Nedr», 1979. – 245 s.