

Ж.С. Мустафаев<sup>1</sup>, А.Т. Козыкеева<sup>2</sup>,  
А.Е. Алдиярова<sup>2\*</sup>, Л.М. Рыскулбекова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>АО «Институт географии и водной безопасности», Казахстан, г. Алматы

<sup>2</sup>НАО «Казакский национальный аграрный исследовательский университет», Казахстан, г. Алматы

\*e-mail: ainura.aldiarova@kaznaru.edu.kz

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ КАЧЕСТВА ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОД ВОДОСБОРОВ РЕЧНЫХ БАССЕЙНОВ

Для осуществления количественной и качественной оценки природной и антропогенной деятельности на водосборных территориях речных бассейнов с использованием принципов и законов природопользования необходимы многолетние систематизированные объективные гидрологические, гидрогеохимические и хозяйственные информационно-аналитические материалы. При этом научная и теоретическая ценность методов оценки качества поверхностных вод речных бассейнов определяется в определенной степени математической корректностью поставленных задач и методов их решения, которые характеризуют обоснованность и надежность гидрогеохимических процессов водосборных территорий речных бассейнов, что требуют необходимости структурного анализа комплексных гидрохимических индексов оценки загрязнения поверхностных вод, на основе законов природы, принципов и свойств природных процессов.

Цель исследования – на основе генетической теории гидрохимических процессов природной системы разработать математические модели для оценки водохозяйственной деятельности на водосборных территориях речных бассейнов.

Разработанная математическая модель для количественной и качественной оценки гидрохимических процессов водосборов речных бассейнов, получена на основе решения дифференциальных уравнений, соответствующих по физическому и математическому признаку практических задач гидрохимии и принципов нелинейности природных процессов, являются следствием использования классических математических методов построения моделей и их аналитического анализа.

Предложенный подход к оценке качества поверхностных вод водосбора речных бассейнов в совокупности с географическим анализом может быть использован для комплексных геоэкологических исследований, позволяющих разработать рекомендации для рационального управления водными ресурсами в условиях антропогенной деятельности.

**Ключевые слова:** качество воды, математическая модель, поверхностные воды, дифференциальное уравнение, гидрохимические процессы.

Zh.S. Mustafayev<sup>1</sup>, A.T. Kozykeyeva<sup>2</sup>, A.E. Aldiyarova<sup>2\*</sup>,  
L.M. Ryskulbekova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>JSC «Institute of Geography and Water Security», Kazakhstan, Almaty

<sup>2</sup>NJSC «Kazakh National Agrarian Research University», Kazakhstan, Almaty

\*e-mail: ainura.aldiarova@kaznaru.edu.kz

### Mathematical model of surface water quality dynamics in river basin catchments

To carry out a quantitative and qualitative assessment of natural and anthropogenic activities in the catchment areas of river basins using the principles and laws of nature management, long-term systematic objective hydrological, hydrogeochemical and economic information and analytical materials are needed. At the same time, the scientific and theoretical value of methods for assessing the quality of surface waters in river basins is determined to a certain extent by the mathematical correctness of the tasks set and the methods for solving them, which characterize the validity and reliability of hydrogeochemical processes in the catchment areas of river basins, which require the need for a structural analysis of complex hydrochemical indices for assessing surface water pollution, based on the laws of nature, principles and properties of natural processes.

The aim of the study is to develop mathematical models based on the genetic theory of hydrochemical processes of the natural system for the assessment of water management activities in the catchment areas of river basins.

The developed mathematical model for the quantitative and qualitative assessment of hydrochemical processes in the watersheds of river basins, obtained on the basis of the solution of differential equations that correspond in physical and mathematical terms to the practical problems of hydrochemistry and the principles of nonlinearity of natural processes, are a consequence of the use of classical mathematical methods for building models and their analytical analysis.

The proposed approach to the assessment of surface water quality in the catchment area of river basins in conjunction with geographical analysis can be used for comprehensive geo-ecological studies to develop recommendations for the rational management of water resources under anthropogenic activities.

**Key words:** water quality, mathematical model, surface water, differential equations, hydrochemical processes.

Ж.С. Мұстафаев<sup>1</sup>, Ә.Т. Қозыкеева<sup>2</sup>, А.Е. Алдиярова<sup>2\*</sup>, Л.М. Рыскулбекова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>«География институты және су қауіпсіздігі» АҚ, Қазақстан, Алматы қ.

<sup>2</sup>Қазақ ұлттық аграрлық зерттеу университеті, Қазақстан, Алматы қ.

\*e-mail: ainura.aldiarova@kaznaru.edu.kz

### Өзендердің су жинау алабындағы жер үсті суларының сапасының өзгеруінің математикалық моделі

Әртүрлі қағидалар мен әдістерді пайдалана отырып, өзеннің сужинау алабы аймағының табиғи және антропогендік қызметтерін сандық және сапалық бағалауды жүзеге асыру үшін ұзақ мерзімді жүйеленген мақсаттық гидрологиялық, гидрохимиялық және шаруашылық саласының ақпараттық-талдау мәліметтері қажет. Сонымен қатар, бұл мәселенің ғылыми және практикалық қажеттілігі, өзеннің сужинау алабының геоэкологиялық жағдайын бағдарлаудың сенімділігі мен негізділігі дұрыс таңдалған қағидаға және әдіске тікелей байланысты болғандықтан, жер беті суларының ластануын бағалаудың кешенді көрсеткіштерін құрылымдық талдауды талап етеді.

Зерттеу мақсаты – табиғи жүйенің гидрохимиялық процестерінің генетикалық теориясы негізінде өзен бассейндерінің су жинау аумақтарындағы су шаруашылығы қызметін бағалау үшін математикалық модельдерді құру.

Өзен бассейндерінің гидрохимиялық процестерін сандық және сапалық бағалау үшін әзірленген математикалық модель гидрохимияның практикалық есептерінің физикалық және математикалық белгілеріне және табиғи процестердің сызықтық емес принциптеріне сәйкес келетін дифференциалдық теңдеулерді шешу негізінде алынды және модельдерді құрудың классикалық математикалық әдістерін қолданудың, оларды аналитикалық талдаудың нәтижесі болып табылады.

Өзеннің сужинау алабының жер үсті суларының сапасын бағалаудың ұсынылып отырған тәсілі географиялық талдаумен бірге антропогендік әрекет жағдайында су ресурстарын ұтымды басқару бойынша ұсыныстар әзірлеуге мүмкіндік беретін кешенді геоэкологиялық зерттеулер үшін пайдалануға болады.

**Түйін сөздер:** судың сапасы, математикалық модель, жер үсті сулары, дифференциалдық теңдеулер, гидрохимиялық жүргілер.

## Введение

Водосборная территория речных бассейнов представляет собой многокомпонентные геосистемы, имеющие единство гидрогеохимических потоков и выполняющие функции формирования гидрологического и геохимического стока. В основном является объектом природопользования и природообустройства с разнообразными целями использования, в рамках которых открывается возможность комплексной оценки природной и антропогенной деятельности водных объектов.

Для осуществления количественной и качественной оценки природной и антропогенной

деятельности на водосборных территориях речных бассейнов с использованием принципов и законов природопользования необходимы многолетние систематизированные объективные гидрологические, гидрогеохимические и хозяйственные информационно-аналитические материалы.

При этом научная и теоретическая ценность методов оценки качества поверхностных вод речных бассейнов определяется в определенной степени математической корректностью поставленных задач и методов их решения, которые характеризуют обоснованность и надежность гидрогеохимических процессов водосборных

территорий речных бассейнов. Также требуют необходимости структурного анализа комплексных гидрохимических индексов оценки загрязнения поверхностных вод на основе законов природы, принципов и свойств природных процессов.

Многогранность функциональных задач решаемых в рамках водохозяйственной оценки водосбора речных бассейнов с использованием методов моделирования природных процессов на основе полученных многолетних информационно-аналитических материалов для систематического мониторинга качества воды, позволяют долгосрочное прогнозирование гидрохимических процессов и обеспечение экологической устойчивости в пространственно-временном масштабе в условиях антропогенной деятельности.

**Цель исследования** – на основе генетической теории гидрохимических процессов природной системы разработать математические модели для совершенствования методологического подхода оценки качества поверхностных вод водосборов речных бассейнов.

**Материалы и методы исследования.** Исследование проводилось на основе методов и принципов математического моделирования природных процессов с аналитическими решениями дифференциальных уравнений гидрохимических процессов в природных системах и современного опыта создания и исследования моделей оценки качества поверхностных вод в водосборах речных бассейнов.

Программы мониторинга качества воды стали наиболее важными для разработки четкого понимания процессов качества воды для лиц, принимающих решения, для интерпретации и использования этой информации при разработке стратегий сохранения водных ресурсов в мире. Это стало предпосылкой для совершенствования методики определения индекса загрязнения (Nicb, 2004:1; Tirupathi Chanapathi, 2019: 2), использования энтропии Шеннона (Шеннон, 1963: 3; Shannon, Weaver, 1963: 4) в качестве инструмента для разработки энтропийно-взвешенного индекса качества воды (EWQI) (Kunwar Raghvendra Singh, 2019: 5), а также показаны возможности широкого использования индекса качества воды (WQI) (Sipra Mallick, 2017: 6; Godwin Asibor, 2019: 7), как метода оценки качества воды в различных речных бассейнах по всему миру.

Существует большое количество работ, среди которых широко используется в мировой

практике при оценке качества поверхностных вод гидрохимический индекс загрязнения воды (ИЗВ) (Шлычков, 1996: 9; Родзиллер, 1984: 10; 11), где качество воды оценивается на основе интегрального показателя класса загрязненности и для оценки качества воды водосбора речных бассейнов используются определенные количества химических элементов:

$$\text{ИЗВ} = (1/6) \cdot \sum (C_{i-6} / \text{ПДК}_{i-6}) \setminus$$

$$\text{или } \text{ИЗВ} = (1/N) \sum_i^N (C_i / \text{ПДК}_i), \quad (1)$$

где:  $\mathbf{N}$  – строго лимитируемое количество показателей (ингредиентов), берущих для расчета, имеющих наибольшее значение, независимо от того, превышают они  $\text{ПДК}_i$  или нет, включая показатель растворенного кислорода  $\text{БПК}_e$ , который для поверхностных вод суши  $\mathbf{n} = 6$ ;  $C_i$  – концентрация  $i$ -го загрязняющего вещества в воде;  $\text{ПДК}_i$  – предельно допустимая концентрация  $i$ -го загрязняющего вещества;  $N$  – количество ингредиентов, по которым осуществлялся расчет.

В процессе природной и антропогенной деятельности водосбора речных бассейнов, где в результате их совместного взаимодействия происходят изменения объема воды и качественного состава, которые формируют природно-техногенную среду обитания водных и около водных биологических организмов. В условиях изменяющегося состояния жизнедеятельности водосбора речных бассейнов возникает необходимость разработки интегрального показателя для оценки качества воды, полученного на основе законов природы и принципов геохимии, учитывающего нелинейность природных процессов.

Для оценки качества поверхностных вод речных бассейнов в Российской Федерации предлагается формула В.В. Шабанова, то есть коэффициент предельной загрязненности воды ( $K_{\text{пз}}$ ), полученного путем совместного решения уравнений гидрологического и гидрохимического баланса и в определенной степени являющихся одним из модификации индекса загрязнения воды (ИЗВ), широко используемых в мировой практике для оценки качества поверхностных вод речных бассейнов. Математическая сущность коэффициента предельной загрязненности воды ( $K_{\text{пз}}$ ) сводится к следующему, то есть при совместном решении уравнений гидрологического и

гидрохимического балансов, можно получить линейное уравнение интегрального показателя качества воды, учитывающего фактический объем воды водосбора речных бассейнов ( $W_{пз}$ ) (Шабанов, 2009а: 12):

$$W_{пз} = W_p \cdot K_{пз}, \quad (2)$$

где:  $W_p$ - фактический объем речного стока, учитывающий объемы безвозвратного водопотребления.

При этом уравнение водохозяйственного баланса с учетом показателя качества воды речных бассейнов примет следующий вид:

$$W_p \cdot C_n + W_v \cdot C_p = (W_p + W_v) \cdot ПДК$$

или

$$W_v = W_p \cdot (C_n - ПДК) / (ПДК - C_p), \quad (3)$$

то есть при решении уравнений (3) относительно  $W_v = W_v / W_p$  получим уравнение для определения виртуального объема воды ( $W_v$ ) относительно загрязняющих химических веществ речных бассейнов:

$$W_v = (W_v / W_p) = (C_n - ПДК) / (ПДК - C_p), \quad (4)$$

где:

$C_n$  – фоновая концентрация веществ в реке;

$C_p$  – концентрация загрязняющего вещества в реке после сброса сточных вод.

Соотношение, стоящее в правой части уравнения для определения виртуального объема воды ( $W_v$ ), характеризующего соотношение конкретных концентраций загрязняющих веществ к их предельно-допустимому значению, представляет собой одиночный коэффициент предельной загрязненности ( $K_{пз}$ ), показывающего уровень сверхнормативного загрязнения водосбора речных бассейнов по отдельным химическим элементам (Шабанов, 2009б: 12):

$$K_{пз} = (C_n - ПДК) / (ПДК - C_p) \quad (5)$$

В случае если водосбор бассейна реки загрязняется веществом, которого в природных условиях в воде не встречается, тогда коэффициент предельной загрязненности отдельными химическими элементами имеет следующий вид:

$$K_{пз} = (C_n - ПДК) / ПДК \quad (6)$$

или, в некоторых случаях его можно представить еще более простой формулой:

$$K_{пз} = C_n / ПДК - 1. \quad (7)$$

Физический смысл коэффициента предельной загрязненности отдельными химическими элементами ( $K_{пз}$ ), то есть отношения  $(C_n - ПДК) / (ПДК - C_p)$  характеризует количественное превышение отдельных загрязняющих веществ или химических элементов от их предельно-допустимой концентрации и в отдельных случаях его значение может быть отрицательной, то есть меньше нуля.

Таким образом, В.В. Шабанов и В.Н. Маркин (Шабанов, 2009в: 12), для практических водохозяйственных расчетов рекомендует использовать упрощенное уравнение коэффициента предельной загрязненности ( $K_{пз}$ ):

$$K_{пз} = (1/N) \sum_i^N [(C_i - ПДК_i) / ПДК_i]$$

$$K_{пз} = (1/N) \cdot \sum_i^N (C_i / ПДК_i) - 1 = ИЗВ - 1 \quad (8)$$

Таким образом, все увеличивающиеся количество методов оценок качества поверхностных вод речных бассейнов, растущее разнообразие принципов и способов их построения требует всестороннего структурного и системного анализа и их соответствие законов природы и природных процессов.

**Результаты исследования обсуждение.** Методологические основы оценки качества поверхностных вод речных бассейнов сформированы в рамках закона лимитирующего (ограничивающего) фактора, то есть закона минимума Либиха и закона толерантности Шелфорда (Попов, 1997а: 13), характеризующие степень отклонения факторов среды обитания биологических сообществ от их оптимальных

значений, которые позволяют определить лимитирующий признак вредного действия качества воды на организм человека.

Нормирование веществ по лимитирующему признаку вредного действия на организм человека в условиях антропогенного загрязнения водных объектов можно определить по двум признакам, то есть по совокупности коэффициента водности ( $K_b$ ), как отношение фактического расхода воды ( $Q_i$ , м<sup>3</sup>/с) к среднемуголетнему расходу воды ( $Q_{ср}$ , м<sup>3</sup>/с) и коэффициента предельной загрязненности ( $K_{пз}$ ) или индекса загрязненности воды (ИЗВ), характеризующих отношение суммы предельно-допустимой концентрации отдельных химических элементов (ПДК<sub>г</sub>) к фактическим значениям отдельных загрязняющих химических элементов ( $C_i$ ).

При этом, для характеристики физического смысла коэффициента предельной загрязненности воды ( $K_{пзи}$ ) несколькими веществами ( $N$ ) через показатель кратности сверхнормативного загрязнения ( $C_i - ПДК_i$ ), определяющийся как индекс загрязненности воды (ИЗВ) минус 1, представляет собой кратность превышения ПДК.

Согласно закону лимитирующего фактора коэффициент предельно-допустимой загрязненности воды ( $K_{пдзи}$ ), как произведение показателя водности речных бассейнов ( $K_b$ ) и коэффициента предельной загрязненности ( $K_{пз}$ ), характеризуется следующими предельными значениями:

$$K_{пдзи} = K_{bi} \cdot K_{пзи}, \quad 1 \geq K_b \geq 0, \\ 1 \geq K_{пзи} \geq 0 \quad (9)$$

При этом концентрация веществ ( $C_i$ ) в воде водоема или речных бассейнов прямо зависит от массы вещества (МВ), поступающих ежегодно в русла речных бассейнов и обратно от фактического расхода воды ( $Q_i$ , м<sup>3</sup>/с), которая показывает, что между коэффициентом водности ( $K_b$ ) и коэффициентом предельно-допустимой загрязненности ( $K_{пдзи}$ ) существует прямая линейная зависимость (Алимов, 1990: 15; Булгаков, 1995: 16).

Математическое моделирование любых природных процессов в определенной степени требует упрощения функциональных действительностей объектов исследования, которые ограничивают их области применения для решения отдельных задач с достаточно

большой достоверностью. Поэтому главной целью математического моделирования гидрохимических процессов в водосборах речных бассейнов является разработка надежных методов прогнозирования качества речных вод, применимых для решения как научных, так и практических задач (Мустафаев, 2009а: 17).

Основные допущения, сделанные при достижении указанной выше цели, заключается в следующем, изменение концентрации веществ в воде рек приближенно описывается дифференциальным уравнением, имеющий следующий вид (Мустафаев, 2009б: 17):

$$dC_i/dt = I(C_i) \quad (10)$$

где:

$I(C_i)$  – функция характеризующая концентрацию загрязняющих веществ или химических элементов  $C_i$ .

При этом с точки зрения математического моделирования концентрация загрязняющих веществ или химических элементов является зависимой функцией от времени и расходов воды речных бассейнов, то есть  $C_i = C(t, Q, H)$ , где  $H$  – показатель характеризующий влияния антропогенных факторов на концентрацию загрязняющих веществ.

Тогда дифференциальное уравнение, описывающее многофакторные гидрохимические процессы, то есть  $C_i = C(t, Q, H)$ , можно записать в следующем виде:

$$dC_i/dt = (dC_i/dt) + (dQ/dt) \cdot (dC_i/dQ) \quad (11)$$

Изменение расхода воды в водосборах речных бассейнов можно описывать следующим выражением:

$$(dQ/dt) = \lambda \cdot Q \quad (12)$$

где:

$\lambda$  – удельная скорость изменения расхода воды в речных бассейнах, в общем случае имеет следующий вид:  $\lambda = \lambda(t, Q)$ .

На основе зависимости от соотношения величин  $dC_i/dt$  и  $(dQ/dt) \cdot (dC_i/dQ)$  можно обосновать один из вариантов схематизации процессов изменения гидрохимических показателей, характеризующих изменение концентрации веществ, связанным преимущественно

с колебанием водности водосбора речных бассейнов (Савичев, 1999: 18):

$$dC_i/dt = (dQ/dt) \cdot (dC_i/dQ) \quad (13)$$

Принимая во внимание зависимость  $(dQ/dt)$ , преобразуем уравнение  $dC_i/dt = I(C_i)$  к виду:

$$dC_i/dQ = I(C_i)/(\lambda \cdot Q) \quad (14)$$

В области математики и математического моделирования решение этого уравнения определяется выбором аналитического выражения для  $I(C_i)$  и  $\lambda$ .

На первом этапе для решения уравнения  $dC_i/dQ = I(C_i)/(\lambda \cdot Q)$ , характеризующего изменение концентрации загрязняющих веществ от расхода воды в речных бассейнах, использована линейная зависимость, которая позволяет получить систему математических моделей при условии  $k/\lambda = const$ :

- аналитическое решение уравнения  $dC_i/dQ = I(C_i)/(\lambda \cdot Q)$  при  $I(C_i) = k \cdot C_i$  имеет следующий вид:  $C_i = C_0 \cdot (Q/Q_0)^{-(k/\lambda)}$ ;

- аналитическое решение уравнения  $dC_i/dQ = I(C_i)/(\lambda \cdot Q)$ , при  $I(C_i) = k \cdot (C_n - C_i)$  имеет следующий вид:  $C_i = C_n - (C_n - C_0) \cdot (Q/Q_0)^{-(k/\lambda)}$ , где  $C_n$  - концентрация химических веществ в водной среде в водосборах речных бассейнов;  $C_0$  - начальная концентрация химических веществ в воде речных бассейнов.

При этом следует отметить, что линейное уравнение гидрохимических процессов  $C_i = C_0 \cdot (Q/Q_0)^{-(k/\lambda)}$ , в определенной степени соответствует по физическому и математическому признакам показательной функции типа  $Y = a \cdot X^b$ , а уравнение  $C_i = C_n - (C_n - C_0) \cdot (Q/Q_0)^{-(k/\lambda)}$  - показательная функция типа с одним свободным параметром:  $Y = C + a \cdot X^b$ .

Следует отметить, что уравнения

$$dC_i/dQ = I(C_i)/(\lambda \cdot Q),$$

$$C_i = C_0 \cdot (Q/Q_0)^{-(k/\lambda)}$$

и

$$C_i = C_n - (C_n - C_0) \cdot (Q/Q_0)^{-(k/\lambda)}$$

согласуется с представлениями А.И. Перельмана, в соответствии с которым изменение количество вещества в природе пропорционально его содержанию и интенсивности миграции (Перельман, 1975:19). Изменение концентрации определяется интенсивностью биохимических превращений, взаимодействием воды с подстилающими породами, органическими и взвешенными веществами, а влияние водности речных бассейнов сказывается на скорости протекания химической реакции:

$$dC_i/dt \gg (dQ/dt) \cdot (dC_i/dQ) \quad (15)$$

На основе закономерностей геохимических, биохимических и гидрохимических процессов в речных бассейнах для решения уравнения  $dC_i/dt = I(C_i)$  получены экспоненциальные зависимости от величины концентрации, позволяющие получить ряд расчетных формул при условии  $k = const$ :

- аналитическое решение уравнение  $dC_i/dt = I(C_i)$  при  $I(C_i) = k \cdot C_i$  имеет следующий вид:  $C_i = C_0 \cdot \exp(-k \cdot t)$ ;

- аналитическое решение уравнение  $dC_i/dt = I(C_i)$  при  $I(C_i) = k \cdot (S - C_i)$  имеет следующий вид:  $C_i = S - (S - C_0) \cdot \exp(-k \cdot t)$ .

При этом влияние водообмена на скорость протекания химических и биохимических реакций экспоненциальной функции  $\exp(-k \cdot t)$ , протекающей в водосборах речного бассейна, можно приводить к выражению:

$$\exp[-k \cdot f(Q)] \quad (16)$$

где:  $f(Q)$  - некоторая функция от расхода воды водосборов речных бассейнов, соответствующая времени добегания водных масс по длине реки или ее участка.

На основе этого обстоятельства уравнения  $C_i = C_0 \cdot \exp(-k \cdot t)$  и  $C_i = S - (S - C_0) \cdot \exp(-k \cdot t)$ , могут быть преобразованы к виду  $Y = a \cdot \exp(-b \cdot Q^x)$ .

Таким образом, система дифференциального уравнения  $dC_i/dt = I(C_i)$ , описывающего гидрохимический процесс в водосборах речных бассейнов, может быть использована и для прогноза их гидрохимических характеристик и качества воды.

Водосборы речных бассейнов, как разновидности или элементы геосистемы, обладают общесистемными свойствами, как

нелинейность природных процессов, где трансформация и обмен энергий и веществом идет всегда с замедляющей скоростью. При этом интенсивность вредного действия на живой организм в условиях увеличения антропогенного загрязнения водных объектов замедляется за счет адаптации, то есть степень вредного воздействия пропорциональна произведению концентрации вещества в воде речных бассейнов.

Построение любой модели в той или иной мере связано с упрощением действительности, что обуславливает наличие ограничений области ее применения и, в то же время, дает возможность получить достоверных результатов. На основе этого допущения нами получено дифференциальное уравнение, характеризующее изменение коэффициента предельной загрязненности воды ( $K_{пзи}$ ), от приведенного индекса загрязненности воды (**ИЗВ**) (Мустафаев, 2021: 20):

$$dK_{пзи}/dИЗВ = k \cdot (K_{пзи}) \quad (17)$$

Решение этого уравнения определяется выбором аналитического выражения  $k \cdot (K_{пзи})$ , которое описывается экспоненциальной функцией имеющего следующий вид:

$$K_{пзи} = (1/N) \cdot \sum_{i=1}^N [1 - \exp(-ИЗВ_i)] = \\ = (1/N) \cdot \sum_{i=1}^N \{1 - \exp[-(C_i/ПДК_i)]\} \quad (18)$$

Математическая и физическая сущность полученных экспоненциальных уравнений для оценки качества воды на основе нелинейности природных процессов характеризует вредное воздействие их на живой организм и является следствием использования законов природопользования, классических математических методов построения моделей и их аналитического анализа.

Таким образом, коэффициент предельно-допустимой загрязненности воды ( $K_{пдзи}$ ) можно представить как произведение коэффициента водности ( $K_b$ ) и коэффициента предельной загрязненности воды ( $K_{пзи}$ ), который имеет следующий вид:

$$K_{пдзи} = K_b \cdot K_{пзи} = (Q_{ср}/Q_i) \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [1 - \exp(-ИЗВ_i)] \quad (19)$$

где:

$K_{пдзи}$  – коэффициент предельно-допустимой концентрации;

$K_b$  – коэффициент водности;

$K_{пзи}$  – коэффициент предельной загрязненности воды;

$Q_i$  – фактический расход воды ( $m^3/c$ );

$Q_{ср}$  – среднееголетний расход воды ( $m^3/c$ );

**ИЗВ** – индекс загрязненности воды:  
 $ИЗВ = C_i/ПДК_i$ ;

$C_i$  – фактическая концентрация  $i$ -го ингредиента;

**ПДК<sub>i</sub>** – предельно-допустимая концентрация загрязняющих веществ или химических элементов, соответствующая хозяйственной деятельности водосбора речных бассейнов.

При этом, математическая модель для определения коэффициента предельно-допустимой загрязненности воды ( $K_{пдзи}$ ) имеет ряд преимуществ, во-первых, учитывает один из главных свойств геосистемы – нелинейность природных процессов, во-вторых, возможность оценки качества воды через показатель **ИЗВ**, в-третьих, генетическое сходство с индексом трофности Шеннона

$$(H = - \sum \left(\frac{n_i}{N}\right) \cdot \ln \left(\frac{n_i}{N}\right) )$$

где **H** – видовое разнообразие;

$n_i$  – число особей каждого вида во всех пробах;

**N** – общая численность особей всех видов во всех пробах), характеризующая экологическое состояние водных и около водных систем речных бассейнов, в-четвертых, определение качества поверхностных вод с помощью предельно-допустимой концентрации загрязняющих веществ или химических элементов с учетом хозяйственной деятельности речных бассейнов, в-пятых, учитывает водность водосбора речных бассейнов.

## Выводы

Достоверность и надежность разработанных математических моделей для оценки качества поверхностных вод водосборов речных бассейнов на основе решения дифференциальных уравнений гидрохимических процессов природных систем и соответствующих по физическому и математи-

ческому признакам практических задач гидрохимии и принципов нелинейности природных процессов, является следствием принципов построения математических моделей на основе законов природы и их аналитического анализа с использованием информационно-аналитических материалов, характеризующих исследуемые объекты.

Предложенный подход к оценке качества поверхностных вод водосборов речных бассейнов в совокупности с географическим анализом может быть использован для комплексных геоэкологических исследований, позволяющих разрабатывать рекомендации для рационального управления водными ресурсами в условиях антропогенной деятельности.

### Литература

- Godwin Asibor, Oborakpororo Ofuya. Surface Water Quality Assessment of Warri Metropolis Using Water Quality Index// International Letters of Natural Sciences. – 2019, – March. – (Volume 74).- P.
- Kunwar Raghvendra Singh, Rahul Dutta, Aiav S. Kalamdhad, Bimlesh Kumar. Information entropy as a tool in surface water quality assessment // Environmental Earth Sciences.- 2019. – January. -78(1). -P.
- Nich N., Perjoiu M. The surface water quality assessment//Environmental engineering and management journal – 2004.-September 3(3).- P. 477-488.
- Shannon C.B., Weaver W. The Mathematical Theory of Communication. – Urbana (Illinois): Univ. of Illinois Press, 1963. – 345 p.
- Sipra Mallick, F. Baliarsingh. Surface Water Quality Assessment and Prediction Modelling of Kathajodi River//International Journal of Emerging Research in Management & Technology. – 2017, August. (Volume-6). – P.447-457.
- Tirupathi Chanapathi, Thhatikkonda Shashidhar. Fuzzy-Based Regional Water Quality Index for Surface Water Quality Assessment // Journal of Hazardous, Toxic, and Radioactive Waste. 2019, May.-Vol.23.- Issue 4.- P.
- Алимов А.Ф. Основные положения теории функционирования водных экосистем // Гидробиологический журнал, 1990.- Том 26. – №6. -С.3-12.
- Булгаков Н.Г., Дубинина В.Г., Левич А.П., Терехин А.Т. Метод поиска сопряженностей между гидробиологическими показателями и абиотическими факторами среды // Известия РАН, серия биологическая, 1995.-вып. 2.- С. 218-225.
- Временные методические указания по комплексной оценке качества поверхностных и морских вод по гидрохимическим показателям. – М.: Госкомгидромета, 1986. – 6 с.
- Методические рекомендации по формализованной комплексной оценке качества поверхностных и морских вод по гидрохимическим показателям. – М.: Госкомгидромета, 1988. – 6 с.
- Методические указания по организации и функционированию подсистемы мониторинга состояния трансграничных поверхностных вод Казахстана. – Астана, 2012. – 140 с.
- Мустафаев Ж.С., Рыскулбекова Л.М. Геоэкологическая оценка качества поверхностных вод речного бассейна с математическим анализом (на примере реки Иле)// Гидрометеорология и экология. – 2021. – №4. – С. 6-19.
- Мустафаев Ж.С., Рябцев А.Д., Ибатуллин С.Р., Козыкеева А.Т. Модель природы и моделирование природного процесса. – Тараз, 2009. – 190 с.
- Перельман А.И. Геохимия ландшафта. – М.: «Высшая школа», 1975. – 342 с.
- Попов В.А. Математическое выражение закона лимитирующего фактора и его приложение к задачам мелиоративного земледелия // Мелиорация и водное хозяйство. – 1997. – №2. – С.30-34.
- Родзиллер И.Д. Прогноз качества воды водоемов – приемников сточных вод. – М.: Стройиздат, – 1984. – 263 с.
- Савичев О.Г. Геоэкология: прогноз качества речных вод (использование зависимостей между гидрохимическими и гидрологическими показателями на примере рек бассейна Оби) // Инженерная экология. – 1999. – №2. – С. 46-53.
- Шабанов В.В., Маркин В.Н. Метод оценки качества вод и состояния водных экосистем. – М: МГУП, 2009. – 154 с.
- Шеннон К. Математическая теория связи / Работы по теории информации и кибернетике. – М.: Ин. литер., 1963. – С. 243-332.
- Шлычков А.П., Жданова Г.Н., Яковлева О.Г. Использование коэффициента стока загрязняющих веществ для оценки состояния рек // Мониторинг. – 1996. – №2. – С. 23-27.

### References

- Godwin Asibor, Oborakpororo Ofuya. Surface Water Quality Assessment of Warri Metropolis Using Water Quality Index// International Letters of Natural Sciences. – 2019, – March. – (Volume 74).- P.
- Kunwar Raghvendra Singh, Rahul Dutta, Aiav S. Kalamdhad, Bimlesh Kumar. Information entropy as a tool in surface water quality assessment // Environmental Earth Sciences.- 2019. – January. -78(1). -P.
- Nich N., Perjoiu M. The surface water quality assessment//Environmental engineering and management journal – 2004.-September 3(3).- P. 477-488.
- Shannon K. Mathematical theory of communication / Works on information theory and cybernetics. – Moscow: In. litt., 1963. P. 243-332.
- Shannon C.B., Weaver W. The Mathematical Theory of Communication. – Urbana (Illinois): Univ. of Illinois Press, 1963. – 345 p.

Tirupathi Chanapathi, Thhatikkonda Shashidhar. Fuzzy-Based Regional Water Quality Index for Surface Water Quality Assessment // Journal of Hazardous, Toxic, and Radioactive Waste. 2019, May.-Vol.23.- Issue 4.- P.

Alimov A.F. Osnovnye polozenija teorii funkcionirovanija vodnyh jekosistem [ Main provisions of the theory of aquatic ecosystems functioning]// Gidrobiologicheskij zhurnal, 1990.- Tom 26. – №6. -S.3-12.

Bulgakov N.G., Dubinina V.G., Levich A.P., Terehin A.T. Metod poiska soprjazhennostej mezhdru gidrobiologicheskimi pokazateljami i abioticheskimi faktorami sredy [ Method for searching conjugations between hydrobiological indicators and abiotic environmental factors]// Izvestija RAN, serija biologicheskaja, 1995.-vyp. 2.- S. 218-225.

Vremennye metodicheskie ukazaniya po kompleksnoj ocenke kachestva poverhnostnyh i morskij vod po gidrohimicheskim pokazateljam. [ Methodical recommendations for the formalized complex assessment of surface and sea water quality by hydrochemical indicators] – Moskva: Goskomgidrometa, 1986. – 6 s.

Metodicheskie rekomendacii po formalizovanoj kompleksnoj ocenke kachestva poverhnostnyh i morskij vod po gidrohimicheskim pokazateljam [Methodological recommendations for a formalized comprehensive assessment of the quality of surface and marine waters by hydrochemical indicators].- Moskva: Goskomgidrometa, 1988. – 6 s.

Metodicheskie ukazaniya po organizacii i funkcionirovaniju podsistemy monitoringa sostojanija transgranichnyh poverhnostnyh vod Kazahstana [ Methodological instructions on the organization and functioning of a subsystem for monitoring the condition of transboundary surface waters of Kazakhstan].-Astana, 2012.-140 s.

Mustafaev Zh.S., Ryskulbekova L.M. Geojekologicheskaja ocenka kachestva poverhnostnyh vod rechnogo bassejna s matematicheskim analizom (na primere reki Ile) [Geoecological assessment of surface water quality of the river basin with mathematical analysis (on the example of the river Ile)]// Gidrometeorologija i jekologija, 2021.- №4.- S. 6-19.

Mustafaev Zh.S., Rjabcev A.D., Ibatullin S.R., Kozykeeva A.T. Model' prirody i modelirovanie prirodnoho processa [Model of nature and modeling of natural process].- Taraz, 2009.- 190 s.

Perel'man A.I. Geohimija landshafta [ Geochemistry of landscape].- M.: «Vysshaja shkola», 1975.-342 s.

Popov V.A. Matematicheskoe vyrazhenie zakona limitirujushhego faktora i ego prilozhenie k zadacham meliorativnoho zemledelija [Mathematical expression of limiting factor law and its application to problems of land reclamation] // Melioracija i vodnoe hozjajstvo, 1997.- №2.- S.30-34.

Rodziller I.D. Prognoz kachestva vody vodoemov – priemnikov stochnykh vod [Prediction of water quality of water reservoirs – wastewater receivers] . – M.: Strojizdat. – 1984. – 263 s.

Savichev O.G. Geojekologija: prognoz kachestva rechnykh vod (ispol'zovanie zavisimostej mezhdru gidrohimicheskimi i gidrologicheskimi pokazateljami na primere rek bassejna Obi) [Geoecology: forecast of river water quality (using dependences between hydrochemical and hydrological indicators by the example of the rivers of the Ob basin)] // Inzhenernaja jekologija, 1999.- №2.- S. 46-53.

Shabanov V.V., Markin V.N. Metod ocenki kachestva vod i sostojanija vodnyh jekosistem [Method of assessment of water quality and state of aquatic ecosystems] – M: MGUP, 2009.- 154 s.

Shennon K. Matematicheskaja teorija svjazi / Raboty po teorii informacii i kibernetike.[ Mathematical theory of communication / Works on information theory and cybernetics ] – M.: In. liter., 1963. S. 243-332.

Shlychkov A.P., Zhdanova G.N., Jakovleva O.G. Ispol'zovanie koeficienta stoka zagraznjajushhih veshhestv dlja ocenki sostojanija rek [Using pollutant flow coefficient to assess river conditions] // Monitoring. – 1996. – №2. – S 23-27.